

Chương III. BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

TS. Hà Văn Hiếu

Đại học Kinh Tế - Luật, Tp. Hồ Chí Minh

Ngày 14 tháng 5 năm 2020



CHƯƠNG III. BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

- ❶ Mô hình tối ưu một mục tiêu, phương pháp Lagrange.
- ❷ *Mô hình hàm tiêu dùng của hộ gia đình.*
- ❸ Mô hình hàm sản xuất.
- ❹ Giải bài toán tối ưu phi tuyến bằng Excel.

MÔ HÌNH TỐI ƯU (MỘT MỤC TIÊU)

Example

Bài toán QHTT

Có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} f = & 2x + 3y \rightarrow \min \\ & x + y = 5 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = & 2x + 3y \rightarrow \min \\ & (x, y) \in A, \\ A = & \{(x, y) : x + y = 5; x, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

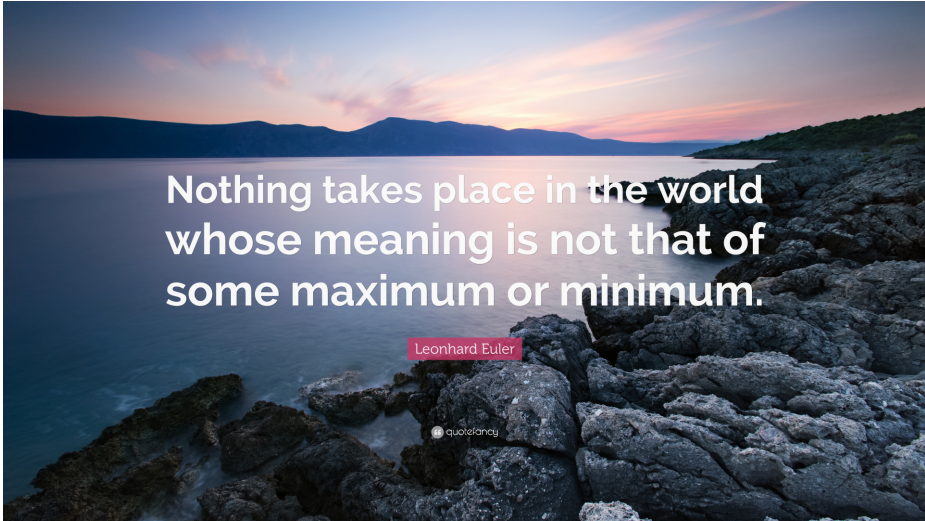
Định nghĩa

Một bài toán tối ưu cực tiểu là một bài toán có dạng:

Cho trước: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Tìm: $x_o \in A$ sao cho $f(x_o) \leq f(x)$ với mọi $x \in A$.

Ý NGHĨA CỦA MÔ HÌNH TỐI ƯU



Nothing takes place in the world
whose meaning is not that of
some maximum or minimum.

Leonhard Euler

 quote fancy

ỨNG DỤNG CỦA MÔ HÌNH TỐI ƯU

MH tối ưu được ứng dụng sâu rộng trong nhiều lĩnh vực như:

- Mechanics (cơ học).
- Economics and Finances (Kinh tế học và tài chính học).
- Electrical Engineering (Kỹ thuật điện).
- Civil Engineering (kỹ thuật xây dựng dân dụng).
- Operations research (Vận trù học).
- Control engineering (kỹ thuật điều khiển).
- Geophysics (địa vật lý).
- Molecular modeling (mô hình hóa phân tử).
- Computational systems biology (sinh học hệ thống tính toán).
- Machine Learning (máy học).

PHÂN LOẠI MÔ HÌNH TỐI ƯU

- ❶ Quy hoạch tuyến tính.
- ❷ Quy hoạch phi tuyến.
 - Tối ưu trơn.
 - Tối ưu lồi.
 - Tối ưu không lồi.
- ❸ Tối ưu rời rạc hay tối ưu tổ hợp.
- ❹ Tối ưu đa mục tiêu.
- ❺ Quy hoạch ngẫu nhiên.
- ❻ Quy hoạch động. hoạch Lípshitz, v.v.

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 1

Tập chấp nhận

Tập các khả năng hay lựa chọn của tác nhân khi thực hiện hoạt động kinh tế được gọi là *tập chấp nhận* đối với hoạt động của tác nhân đó, và ta thường ký hiệu tập này bởi D .

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 1

Tập chấp nhận

Tập các khả năng hay lựa chọn của tác nhân khi thực hiện hoạt động kinh tế được gọi là *tập chấp nhận* đối với hoạt động của tác nhân đó, và ta thường ký hiệu tập này bởi D .

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì tập chấp nhận tương đương với tập A .

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 1

Tập chấp nhận

Tập các khả năng hay lựa chọn của tác nhân khi thực hiện hoạt động kinh tế được gọi là *tập chấp nhận* đối với hoạt động của tác nhân đó, và ta thường ký hiệu tập này bởi D .

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì tập chấp nhận tương đương với tập A .

Example

Ví dụ như khi người tiêu dùng cần mua một mặt hàng X với số lượng là x , người đó sẽ chịu "giới hạn" bởi kinh phí, và do đó x sẽ bị chặn trên bởi một con số M nhất định. Như vậy $D = \{x : 0 \leq x \leq M\}$.

Biến chọn

Nếu khả năng lựa chọn của tác nhân được mô hình hóa bởi vectơ biến $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các biến $x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*. Như vậy,

Biến chọn

Nếu khả năng lựa chọn của tác nhân được mô hình hóa bởi vectơ biến $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các biến $x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*. Như vậy,

- các biến chọn trực tiếp thể hiện khả năng lựa chọn của tác nhân,

Biến chọn

Nếu khả năng lựa chọn của tác nhân được mô hình hóa bởi vectơ biến $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các biến $x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*. Như vậy,

- các biến chọn trực tiếp thể hiện khả năng lựa chọn của tác nhân,
- các biến chọn là các biến nội sinh.

Biến chọn

Nếu khả năng lựa chọn của tác nhân được mô hình hóa bởi vectơ biến $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các biến $x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*. Như vậy,

- các biến chọn trực tiếp thể hiện khả năng lựa chọn của tác nhân,
- các biến chọn là các biến nội sinh.

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì vectơ biến X tương đương với biến $x \in A$.

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 2

Biến chọn

Nếu khả năng lựa chọn của tác nhân được mô hình hóa bởi vectơ biến $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì các biến $x_1, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*. Như vậy,

- các biến chọn trực tiếp thể hiện khả năng lựa chọn của tác nhân,
- các biến chọn là các biến nội sinh.

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì vectơ biến X tương đương với biến $x \in A$.

Example

Nếu doanh nghiệp muốn chọn mức sản lượng để tối đa hóa lợi nhuận thì biến sản lượng là biến chọn.

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 3

Hàm mục tiêu

là hàm số (thường được lượng hóa và có giá trị thực) biểu diễn cho giá trị mà tác nhân muốn đạt được thông qua hoạt động kinh tế của mình. Như vậy, hàm mục tiêu cũng là một biến nội sinh.

Hàm mục tiêu

là hàm số (thường được lượng hóa và có giá trị thực) biểu diễn cho giá trị mà tác nhân muốn đạt được thông qua hoạt động kinh tế của mình. Như vậy, hàm mục tiêu cũng là một biến nội sinh.

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì hàm mục tiêu tương đương với hàm f .

MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - 3

Hàm mục tiêu

là hàm số (thường được lượng hóa và có giá trị thực) biểu diễn cho giá trị mà tác nhân muốn đạt được thông qua hoạt động kinh tế của mình. Như vậy, hàm mục tiêu cũng là một biến nội sinh.

Trong mô hình tối ưu tổng quát, thì hàm mục tiêu tương đương với hàm f .

Example

Nếu doanh nghiệp muốn chọn mức sản lượng để tối đa hóa lợi nhuận thì biến lợi nhuận là biến (hàm) mục tiêu.

BÀI TOÁN TỐI ƯU QUY HOẠCH

Định nghĩa

Nếu tập chấp nhận được mô tả bởi các phương trình, bất phương trình thì bài toán tối ưu được gọi là bài toán quy hoạch.

BÀI TOÁN TỐI ƯU QUY HOẠCH

Định nghĩa

Nếu tập chấp nhận được mô tả bởi các phương trình, bất phương trình thì bài toán tối ưu được gọi là bài toán quy hoạch.

Example

$$\begin{aligned} f &= 2x + 3y \rightarrow \min \\ (x, y) &\in A, \\ A &= \{(x, y) : x + y = 5; x, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

là một bài toán quy hoạch (tuyến tính).

BÀI TOÁN TỐI ƯU QUY HOẠCH

Định nghĩa

Nếu tập chấp nhận được mô tả bởi các phương trình, bất phương trình thì bài toán tối ưu được gọi là bài toán quy hoạch.

Example

$$\begin{aligned} f &= 2x + 3y \rightarrow \min \\ (x, y) &\in A, \\ A &= \{(x, y) : x + y = 5; x, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

là một bài toán quy hoạch (tuyến tính).

Lưu ý: Nếu hoặc là hàm mục tiêu, hoặc là một trong các ràng buộc không phải là hàm tuyến tính thì ta nói bài toán là quy hoạch phi tuyến.

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TỔNG QUÁT TRONG KINH TẾ

$$\begin{aligned} f = \quad & f(x) \rightarrow \max(\min) \\ D = \quad & \{x \in \mathbb{R}_+^n : g_i(x) \leq (\geq) b_i \text{ với } i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TỔNG QUÁT TRONG KINH TẾ

$$f = f(x) \rightarrow \max(\min)$$
$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^n : g_i(x) \leq (\geq) b_i \text{ với } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Example (1.13 GT trang 45)

Một doanh nghiệp có hàm tổng doanh thu $TR = 58Q - 0.5Q^2$ và hàm tổng chi phí $TC = \frac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 97Q + FC$, trong đó Q là sản lượng, FC là chi phí cố định. Bài toán xác định sản lượng để mức lợi nhuận tối đa với chi phí cố định là $FC \leq 400$ được mô hình hóa thành

$$\pi = 58Q - 0.5Q^2 - (\frac{1}{3}Q^3 - 8.5Q^2 + 97Q + FC) \rightarrow \max$$
$$FC \leq 400.$$

VÍ DỤ - DANH MỤC ĐẦU TƯ HIỆU QUẢ MARKOWITZ (Markowitz Efficient Set)

Danh mục Markowitz

- Harry Markowitz đã *mô hình hóa* quá trình lựa chọn danh mục đầu tư (Nobel kinh tế 1990).
- Mục tiêu là tìm các tổ trọng chứng khoán trong danh mục đầu tư sao cho: giảm tới mức *tối thiểu* phương sai (tức là rủi ro) của danh mục đầu tư mà vẫn đạt được một mức thu nhập nhất định.

VÍ DỤ - DANH MỤC ĐẦU TƯ HIỆU QUẢ MARKOWITZ (Markowitz Efficient Set)

Danh mục Markowitz

- Harry Markowitz đã *mô hình hóa* quá trình lựa chọn danh mục đầu tư (Nobel kinh tế 1990).
- Mục tiêu là tìm các tỉ trọng chứng khoán trong danh mục đầu tư sao cho: giảm tới mức *tối thiểu* phương sai (tức là rủi ro) của danh mục đầu tư mà vẫn đạt được một mức thu nhập nhất định.

Với điều kiện

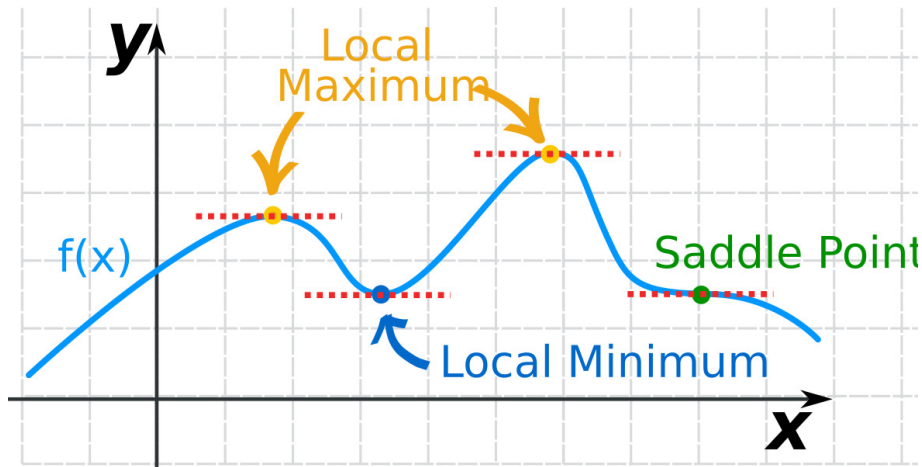
$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_{ij} \rightarrow \min \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i r_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ với mọi } i = 1..n. \end{array} \right.$$

Định nghĩa

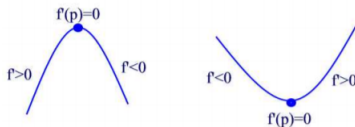
Cho hàm số $f(x)$. Ta nói f

- đạt **cực tiểu** tại c nếu có một khoảng xung quanh c sao cho trên khoảng đó thì hàm f đạt giá trị nhỏ nhất tại c ,
- đạt **cực đại** tại d nếu có một khoảng xung quanh d sao cho trên khoảng đó thì hàm f đạt giá trị lớn nhất tại d ,
- đạt **cực trị** tại c nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại c .

CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG 2 - ÔN TẬP



CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG 3 - ÔN TẬP



Theorem

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên D .

- f đạt cực tiểu địa phương tại $c \in D$ nếu $f'(c) = 0$ và f' đổi dấu từ âm sang dương khi x từ bên trái c sang bên phải c .
- f đạt cực đại địa phương tại $c \in D$ nếu $f'(c) = 0$ và f' đổi dấu từ dương sang âm khi x từ bên trái c sang bên phải c .

CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG 4 - ÔN TẬP

Theorem

Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên D .

- f đạt cực tiểu địa phương tại $c \in D$ nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$.
- f đạt cực đại địa phương tại $c \in D$ nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) < 0$.

Ví dụ

Tìm cực trị địa phương của hàm số $y = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

CỰC TRỊ TUYỆT ĐỐI (GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT) - ÔN TẬP

Theorem

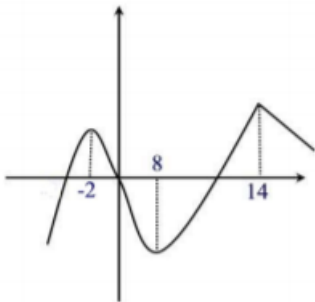
Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Lúc đó, hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$

Lưu ý.

Để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của f trên đoạn $[a, b]$, ta tìm tất cả các cực trị trên đoạn $[a, b]$ và so sánh chúng với nhau để tìm ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT 2 - ÔN TẬP

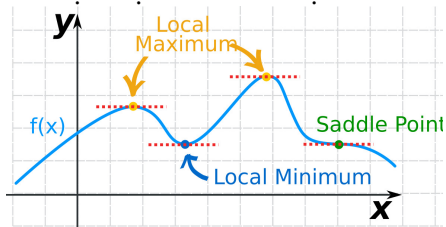
Cho hàm số f xác định bởi



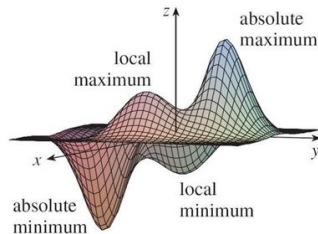
- Trên đoạn $[-2, 8]$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x = -2$.
- Trên đoạn $[-2, 14]$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x = 14$.

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN - ÔN TẬP

Cực trị của hàm một biến



Cực trị của hàm hai biến



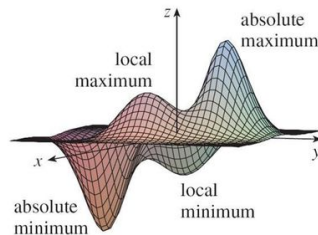
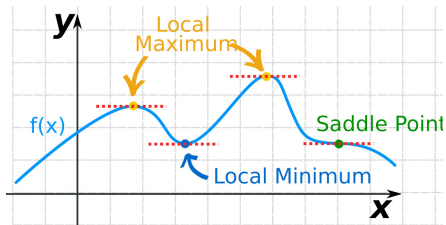
CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN 2 - ÔN TẬP

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$. Ta nói f

- đạt **cực tiểu** tại (x_o, y_o) nếu có một khoảng xung quanh (x_o, y_o) sao cho trên khoảng đó thì hàm f đạt giá trị nhỏ nhất tại (x_o, y_o) ,
- đạt **cực đại** tại (x_o, y_o) nếu có một khoảng xung quanh (x_o, y_o) sao cho trên khoảng đó thì hàm f đạt giá trị lớn nhất tại (x_o, y_o) ,
- đạt **cực trị** tại (x_o, y_o) nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại (x_o, y_o) .

CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG 1 - ÔN TẬP



Định lý

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định và khả vi trên D . Lúc đó **nếu** hàm số f đạt cực trị (địa phương) tại (x_o, y_o) **thì** ta có

$$\begin{cases} f'_x(x_o, y_o) = 0 \\ f'_y(x_o, y_o) = 0. \end{cases}$$

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN - ÔN TẬP

Theorem

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định và khả vi cấp 2 trên D . Giả sử (x_o, y_o) là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$.

$$\text{Đặt } A = f''_{x^2}(x_o, y_o), \quad B = f''_{xy}(x_o, y_o), \quad C = f''_{y^2}(x_o, y_o).$$

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN - ÔN TẬP

Theorem

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định và khả vi cấp 2 trên D . Giả sử (x_o, y_o) là một nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } A = f''_{x^2}(x_o, y_o), \quad B = f''_{xy}(x_o, y_o), \quad C = f''_{y^2}(x_o, y_o).$$

- ❶ Nếu $\Delta = AC - B^2 < 0$ thì điểm (x_o, y_o) không phải là điểm cực trị của f .
- ❷ Nếu $\Delta = AC - B^2 > 0$ thì (x_o, y_o) là một điểm cực trị của f .
 - Nếu $A > 0$ thì điểm cực trị ấy là điểm cực tiểu.

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN - ÔN TẬP

Theorem

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định và khả vi cấp 2 trên D . Giả sử (x_o, y_o) là một nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } A = f''_{x^2}(x_o, y_o), \quad B = f''_{xy}(x_o, y_o), \quad C = f''_{y^2}(x_o, y_o).$$

- ❶ Nếu $\Delta = AC - B^2 < 0$ thì điểm (x_o, y_o) không phải là điểm cực trị của f .
- ❷ Nếu $\Delta = AC - B^2 > 0$ thì (x_o, y_o) là một điểm cực trị của f .
 - Nếu $A > 0$ thì điểm cực trị ấy là điểm cực tiểu.
 - Còn nếu $A < 0$ thì điểm cực trị ấy là điểm cực đại.

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN - HÀM LAGRANGE (LAGRANGE MULTIPLIER) - ÔN TẬP

Giả sử ta cần tìm cực trị của hàm hai biến

$$z = f(x, y),$$

với điều kiện $\phi(x, y) = 0$.

Hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

được gọi là *hàm Lagrange* (tương ứng với bài toán tìm cực trị trên) và λ được gọi là *nhân tử Lagrange*.

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN 2 - ÔN TẬP

Ta sẽ chuyển bài toán tìm cực trị **có điều kiện** thành bài toán tìm cực trị **tự do** nhờ hàm Lagrange như sau:

Định lý

Nếu (x_o, y_o) là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$ với điều kiện $\phi(x, y) = 0$, thì tồn tại một số λ_o sao cho (x_o, y_o, λ_o) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \phi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \phi'_y(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN 2 - ÔN TẬP

Ta sẽ chuyển bài toán tìm cực trị **có điều kiện** thành bài toán tìm cực trị **tự do** nhờ hàm Lagrange như sau:

Định lý

Nếu (x_o, y_o) là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$ với điều kiện $\phi(x, y) = 0$, thì tồn tại một số λ_o sao cho (x_o, y_o, λ_o) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \phi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \phi'_y(x, y) = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Điểm (x_o, y_o, λ_o) được gọi là một *điểm dừng*.

ĐIỀU KIỆN ĐỦ CỦA CỰC TRỊ CÓ ĐK - ÔN TẬP

Với điểm dừng (x_o, y_o, λ_o) , xét hàm số

$$L_o(x, y) = f(x, y) + \lambda_o \phi(x, y)$$

và tính

$$d^2 L_o(x_o, y_o) = \frac{\delta^2 L_o}{\delta x^2}(x_o, y_o) dx^2 + 2 \frac{\delta^2 L_o}{\delta x \delta y}(x_o, y_o) dx dy + \frac{\delta^2 L_o}{\delta y^2}(x_o, y_o) dy^2,$$

trong đó

$$\frac{\delta \phi}{\delta x}(x_o, y_o) dx + \frac{\delta \phi}{\delta y}(x_o, y_o) dy = 0.$$

- Nếu $d^2 L_o(x_o, y_o) > 0$ thì điểm $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ là một điểm cực tiểu có điều kiện.
- Nếu $d^2 L_o(x_o, y_o) < 0$ thì điểm $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ là một điểm cực đại có điều kiện.

ĐỊNH THỨC HESSEN - ÔN TẬP

Định thức Hesse

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \phi'_x \\ L''_{xy} & L''_{yy} & \phi'_y \\ \phi'_x & \phi'_y & 0 \end{vmatrix} = - \left(L''_{xx}(\phi'_y)^2 - 2L''_{xy}\phi'_x\phi'_y + L''_{yy}(\phi'_x)^2 \right)$$

- Nếu $H(x_o, y_o, \lambda_o) > 0$ thì $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ là một cực đại của f với điều kiện $\phi(x, y) = 0$.
- Nếu $H(x_o, y_o, \lambda_o) < 0$ thì $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ là một cực tiểu của f với điều kiện $\phi(x, y) = 0$.

Bài tập

Tìm cực trị của $f(x, y) = 2x + 5y$ với (x, y) là các điểm nằm trên elip $9x^2 + 16y^2 = 144$.

CỰC TRỊ NHIỀU ĐIỀU KIỆN

Xét bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \min(\max) \\ g_i(x_1, \dots, x_n) &= 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$$

HÀM LAGRANGE - VÍ DỤ

Example

Bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Có hàm Lagrange

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE - 1

Điểm dừng

Điểm dừng của hàm Lagrange là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, n \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE - 1

Điểm dừng

Điểm dừng của hàm Lagrange là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, n \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE - VÍ DỤ

Example

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

Điểm dừng của hàm Lagrange (hay cũng là của bài toán) là nghiệm của hệ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, n \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_j} = 0 \text{ với } j = 1, \dots, m \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_3} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_2} = 0 \end{array} \right.$$

ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE - VÍ DỤ

Example

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_3} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_2} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ -2 - \lambda_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

ĐIỂM CỰC TRỊ LÀ MỘT ĐIỂM DỪNG

Định lý

Cho bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \min(\max) \\ g_i(x_1, \dots, x_n) &= 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Nếu $x^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ là một điểm cực trị của bài toán trên thì nó phải là điểm dừng của hàm Lagrange tương ứng. Nghĩa là phải tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sao cho

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_j}(x_1^o, \dots, x_n^o, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 \text{ với } j = 1, \dots, n \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda_j}(x_1^o, \dots, x_n^o, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0 \text{ với } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

ĐIỂM DỪNG LÀ MỘT ĐIỂM CỰC TRỊ

Định nghĩa - Định lý

Ma trận H sau được gọi là ma trận Hessian tương ứng:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\delta g_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta g_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\delta g_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_n} \\ \frac{\delta g_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta g_k}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta x_1^2} & \cdots & \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta x_n \delta x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g_1}{\delta x_n} & \cdots & \frac{\delta g_k}{\delta x_n} & \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta x_1 \delta x_n} & \cdots & \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta x_n^2} \end{bmatrix}$$

Điểm dừng nào làm cho ma trận H *xác định dương* là điểm cực tiểu, ngược lại nếu xác định âm thì là điểm cực đại. Hơn nữa, nếu hàm mục tiêu f là *lồi* thì các điểm cực tiểu, cực đại ấy còn là các giá trị nhỏ nhất (min), giá trị lớn nhất (max).

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

Do một số tính chất trong kinh tế, cũng như giới hạn của nội dung chương trình nên ta sẽ luôn giả thiết

- các bài toán tối ưu đều có nghiệm.

Lúc ấy, ta có thuật toán để giải bài toán tối ưu bằng nhân tử Lagrange như sau:

1. Viết hàm Lagrange tương ứng của bài toán.
2. Tìm các điểm dừng.
3. Thế các điểm dừng vào hàm mục tiêu để suy ra nghiệm tối ưu.

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ

Example

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ

Example

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ

Example

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

Điểm dừng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ -2 - \lambda_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ

Example

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

Điểm dừng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ -2 - \lambda_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ 3 cho ta $\lambda_2 = -2$. Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - 4 = 0 \\ 4 + 2\lambda_1 x_2 + 2 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - 4 = 0 \\ 4 + 2\lambda_1 x_2 + 2 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\lambda_1} \\ x_2 = \frac{-3}{\lambda_1} \\ \lambda_2 = -2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\lambda_1} \\ x_2 = \frac{-3}{\lambda_1} \\ \lambda_2 = -2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\lambda_1} \\ x_2 = \frac{-3}{\lambda_1} \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1^2 = 13 \\ x_3 = \frac{7}{\lambda_1} - 2 \end{cases}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = 4x_2 - 2x_3 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(2x_1 - x_2 - x_3 - 2).$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\lambda_1} \\ x_2 = \frac{-3}{\lambda_1} \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1^2 = 13 \\ x_3 = \frac{7}{\lambda_1} - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \pm\sqrt{13} \\ \lambda_2 = 2 \\ x_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \\ x_2 = \mp\frac{3}{\sqrt{13}} \\ x_3 = \pm\frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \end{cases}$$

Example

Các điểm dừng của hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{13}, 2) \\(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{13}, 2)\end{aligned}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

Các điểm dừng của hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{13}, 2) \\(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{13}, 2)\end{aligned}$$

Thế vào hàm mục tiêu ta được

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= -3.2111 \\f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= 11.2111\end{aligned}$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

Các điểm dừng của hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{13}, 2) \\(x_1, x_2, x_3) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{13}, 2)\end{aligned}$$

Thế vào hàm mục tiêu ta được

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= -3.2111 \\f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= 11.2111\end{aligned}$$

Do đó, hàm số đạt cực đại là 11.2111 tại

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right).$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

Các điểm dừng của hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{13}, 2) \\(x_1, x_2, x_3) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{13}, 2)\end{aligned}$$

Thế vào hàm mục tiêu ta được

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= -3.2111 \\f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= 11.2111\end{aligned}$$

Và đạt cực tiểu là -3.2111 tại

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right).$$

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ - VÍ DỤ (TT)

Example

Các điểm dừng của hàm Lagrange là

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{13}, 2) \\(x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \quad \text{ứng với } (\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{13}, 2)\end{aligned}$$

Thế vào hàm mục tiêu ta được

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= -3.2111 \\f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) &= 11.2111\end{aligned}$$

Suy ra, nghiệm tối ưu của bài toán là

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right).$$

BÀI TẬP 1

Golf balls

Mr. T, người điều hành hãng sản xuất banh golf GB, đã phát triển một mô hình lợi nhuận phụ thuộc vào x , số lượng banh bán ra hàng tháng (đơn vị nghìn trái), và y , số giờ quảng cáo hàng tháng. Mô hình được cụ thể bởi hàm số:

$$z = f(x, y) = 48x + 96y - x^2 - 2xy - 9y^2,$$

trong đó z có đơn vị là nghìn \$. Hãng sản xuất trong điều kiện chi phí sản xuất và quảng cáo cho bởi

$$20x + 4y = 216.$$

Tìm x, y để tối đa hóa lợi nhuận, và tìm lợi nhuận cực đại.

LỜI GIẢI BÀI TẬP

Tham khảo thêm nhiều bài tập hơn tại
[OpenstaxLagrangeMultipliers](#)

BÀI TẬP 2

Example

Một công ty đã xác định mức sản xuất được cho bởi dạng hàm Cobb-Douglas như sau:

$$f(x, y) = 2.5x^{0.45}y^{0.55},$$

trong đó x là số giờ lao động trong một năm và y là số vốn đầu tư cho công ty đó. Giả sử một đơn vị lao động tốn 40\$ và một đơn vị vốn là 50\$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm sản xuất trong điều kiện chi phí là 500.000\$.

BÀI TẬP 3

Example

Tìm giá trị cực đại và cực tiểu của $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, với điều kiện là

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP 4

Example

Tìm giá trị cực tiểu của

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 9 \\ 5x + 5y + 7z = 29 \end{cases}$$

ĐIỀU KIỆN BẤT ĐẲNG THỨC (Optimization with inequality constraints)

Phát biểu bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\leq b_i \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\geq 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ĐIỀU KIỆN BẤT ĐẲNG THỨC (Optimization with inequality constraints)

Phát biểu bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\leq b_i \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\geq 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1(b_1 - g_1) + \dots + \lambda_m(b_m - g_m).$$

ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE TƯƠNG ỨNG

Điểm dừng của hàm Lagrange

Một điểm $(x^*, \lambda^*) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ được gọi là một điểm dừng của bài toán trên nếu nó thỏa tất cả các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} \leq 0 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{và} \quad \begin{cases} g_j \leq b_j \\ \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_j (b_j - g_j) = 0 \end{cases} \quad \forall j = 1 \dots m$$

Example

Tìm điểm dừng của bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 4x_1 + 3x_2 && \rightarrow \max \\ g(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 && \leq 10 \\ x_1, x_2 &&& \geq 0. \end{aligned}$$

Example

Tìm điểm dừng của bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 4x_1 + 3x_2 && \rightarrow \max \\ g(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 && \leq 10 \\ x_1, x_2 &&& \geq 0. \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L} = 4x_1 + 3x_2 + \lambda(10 - 2x_1 - x_2).$$

Example

Tìm điểm dừng của bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 4x_1 + 3x_2 && \rightarrow \max \\ g(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 && \leq 10 \\ x_1, x_2 &&& \geq 0. \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L} = 4x_1 + 3x_2 + \lambda(10 - 2x_1 - x_2).$$

Điểm dừng là nghiệm của hệ sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{array} \right.$$

VÍ DỤ

Example

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{array} \right.$$

Example

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 4 - 2\lambda \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1(4 - 2\lambda) = 0 \end{cases}$$

Example

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 4 - 2\lambda \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1(4 - 2\lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 3 - \lambda \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_2(3 - 2\lambda) = 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ

Example

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 4 - 2\lambda \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1(4 - 2\lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 3 - \lambda \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_2(3 - \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - 2x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ

Example

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_1}, \mathcal{L}'_{x_2} \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \mathcal{L}'_{x_1}, x_2 \mathcal{L}'_{x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} g \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - g) = 0 \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 4 - 2\lambda \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1(4 - 2\lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 3 - \lambda \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_2(3 - \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(10 - 2x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $(x_1 = 0, x_2 = 10, \lambda = \frac{3}{2})$, nghiệm này chính là điểm dừng của bài toán mà ta xét. Đó cũng là nghiệm tối ưu. Vậy hàm mục tiêu đạt max tại $(x_1 = 0, x_2 = 10)$. Và giá trị max là $f_{\max} = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$.

ĐỊNH LÝ KUHN-TUCKER (KUHN-TUCKER CONDITIONS)

Định lý

Nếu $x^* = (x_1, \dots, x_n)$ là một điểm tối ưu của bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\leq b_i \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\geq 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

thì tồn tại $\lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ sao cho (x^*, λ^*) là một điểm dừng của hàm Lagrange tương ứng.

ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN TRONG KINH TẾ

Do đặc điểm của các hàm kinh tế, cũng như giới hạn nội dung môn học, nên ta sẽ giả sử là điều kiện cần bên trên cũng chính là điều kiện đủ của bài toán tối ưu. Như vậy ta có các bước để tìm điểm tối ưu như sau:

- ❶ Xác định hàm Lagrange tương ứng với bài toán.
- ❷ Tìm điểm dừng tương ứng bằng định lý Kuhn-Tucker.
- ❸ So sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các điểm dừng để suy ra nghiệm tối ưu.

BÀI TẬP

Example

Cho $f = 2x + 3y$ và $g = x^2 + y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của f với điều kiện là $x, y \geq 0$ và $g \leq 2$.

BÀI TẬP

Example

Khi khảo sát x đơn vị lao động và y đơn vị vốn, một công ty sản xuất đồng hồ nhận thấy số đồng hồ sản xuất ra là $P(x, y) = 50x^{0.4}y^{0.6}$ cái. Tìm số lượng tối đa đồng hồ có thể sản xuất được nếu chi phí tối đa là \$20000, biết rằng giá thuê \$100/một đơn vị lao động và \$200/một đơn vị vốn.

GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU BẰNG EXCEL

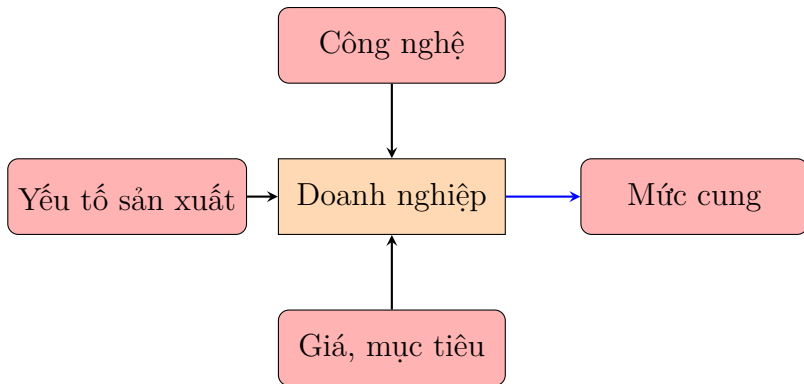
Example

- 1 Cho $f = 2x + 3y$ và $g = x^2 + y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của f với điều kiện là $x, y \geq 0$ và $g \leq 2$.
- 2 Bài toán sản xuất đồng hồ.

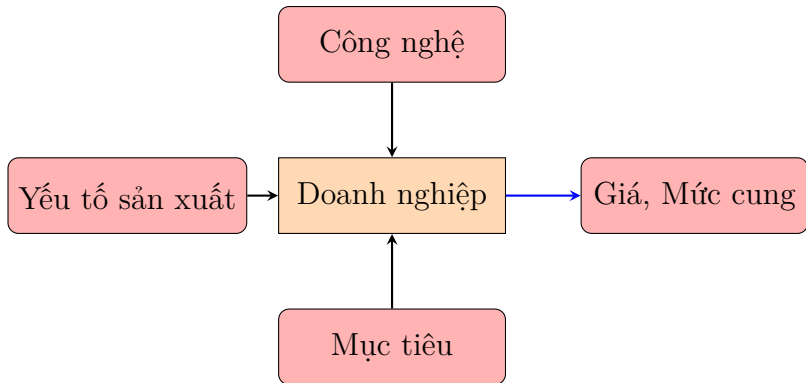
ỨNG DỤNG CỦA MÔ HÌNH TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

- ❶ Mô hình phân tích hành vi của doanh nghiệp - hành vi sản xuất kinh doanh.
- ❷ Mô hình phân tích hành vi của hộ gia đình.

CẠNH TRANH TỰ DO



ĐỘC QUYỀN



HÀM SẢN XUẤT - ĐỊNH NGHĨA

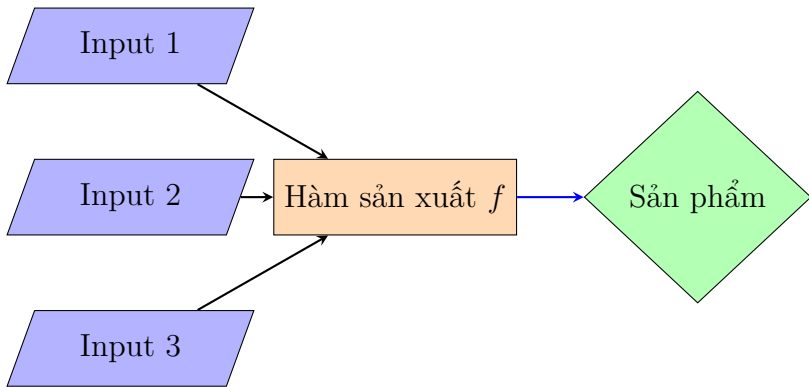
Định nghĩa

Hàm sản xuất là hàm diễn tả mối liên hệ kỹ thuật giữa số lượng các vật liệu đầu vào và sản lượng đầu ra.

HÀM SẢN XUẤT - ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Hàm sản xuất là hàm diễn tả mối liên hệ kỹ thuật giữa số lượng các vật liệu đầu vào và sản lượng đầu ra.



Tham khảo thêm tại khanacademy.org.

HÀM SẢN XUẤT - TÍNH CHẤT

Ký hiệu

- ① $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ② Giá trị trung bình theo biến x_i của Q là

$$AQ_{x_i} \equiv AQ_i = \frac{Q}{x_i}$$

- ③ Giá trị cận biên theo biến và hệ số co giãn theo x_i

$$\begin{aligned} MQ_{x_i} &\equiv MQ_i \\ \epsilon_{x_i}^Q &\equiv \epsilon_i \end{aligned}$$

HÀM SẢN XUẤT - TÍNH CHẤT

Ký hiệu

- ① $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ② Giá trị trung bình theo biến x_i của Q là

$$AQ_{x_i} \equiv AQ_i = \frac{Q}{x_i}$$

- ③ Giá trị cận biên theo biến và hệ số co giãn theo x_i

$$\begin{aligned} MQ_{x_i} &\equiv MQ_i \\ \epsilon_{x_i}^Q &\equiv \epsilon_i \end{aligned}$$

Tính chất

- ① $Q(0) = 0$.
- ② Q không giảm theo X , hay $Q'_{x_i} \geq 0$ với mọi i .

PHÂN TÍCH SO SÁNH TÍNH VỚI HÀM SẢN XUẤT

Hàm sản xuất ngắn hạn

- ❶ Năng suất biên MQ_i .
- ❷ Năng suất lao động trung bình AQ_i .
- ❸ Độ co giãn ϵ_i^Q .
- ❹ Hệ số thay thế của yếu tố i bởi yếu tố j : $\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{MQ_j}{MQ_i}$.

PHÂN TÍCH SO SÁNH TÍNH VỚI HÀM SẢN XUẤT

Hàm sản xuất ngắn hạn

- ① Năng suất biên MQ_i .
- ② Năng suất lao động trung bình AQ_i .
- ③ Độ co giãn ϵ_i^Q .
- ④ Hệ số thay thế của yếu tố i bởi yếu tố j : $\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{MQ_j}{MQ_i}$.

Hàm sản xuất dài hạn

- ① Nếu $Q(\lambda X) > \lambda Q(X)$ thì ta nói công nghệ sản xuất làm hiệu quả tăng theo quy mô.
- ② Để đo hiệu quả sản xuất **tương đối** theo quy mô, ta dùng hệ số co giãn toàn phần $\epsilon^Q = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^Q$.

HÀM SẢN XUẤT DẠNG LEONTIEF

Trường hợp sử dụng

Nếu để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm cần n yếu tố đầu vào theo một tỷ lệ nhất định (fixed proportions) là $k_1 : k_2 : \dots : k_n$ thì khi đó hàm sản xuất sẽ có dạng Leontiev như sau:

$$Q = \min \left\{ \frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \dots, \frac{x_n}{k_n} \right\}$$

HÀM SẢN XUẤT DẠNG LEONTIEF

Trường hợp sử dụng

Nếu để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm cần n yếu tố đầu vào theo một tỷ lệ nhất định (fixed proportions) là $k_1 : k_2 : \dots : k_n$ thì khi đó hàm sản xuất sẽ có dạng Leontiev như sau:

$$Q = \min \left\{ \frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \dots, \frac{x_n}{k_n} \right\}$$

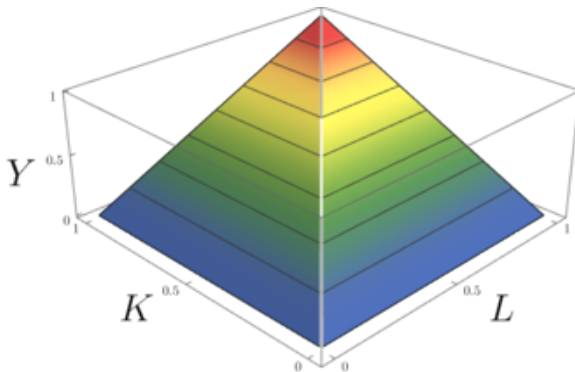
Example

Giả sử trong một giờ làm việc nhất định, một phân xưởng sản xuất có x máy móc, y công nhân và z đơn vị nguyên vật liệu sẵn sàng. Biết rằng:

- Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm thì cần 1 đơn vị nguyên vật liệu.
- Công suất tối đa mỗi máy móc có thể đạt được là 4 sản phẩm/mỗi giờ.
- Mỗi máy móc cần ít nhất 2 công nhân vận hành.

Hỏi mỗi giờ phân xưởng sản xuất được tối đa bao nhiêu sản phẩm (theo x, y, z).

ĐỒ THỊ CỦA HÀM LEONTIEF



HÀM SẢN XUẤT DẠNG LEONTIEF - VÍ DỤ

Example

Giả sử trong một giờ làm việc nhất định, một phân xưởng sản xuất có x máy móc, y công nhân và z đơn vị nguyên vật liệu sẵn sàng. Biết rằng:

- Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm thì cần 1 đơn vị nguyên vật liệu.
- Công suất tối đa mỗi máy móc có thể đạt được là 4 sản phẩm/mỗi giờ.
- Mỗi máy móc cần ít nhất 2 công nhân vận hành.

Hỏi mỗi giờ phân xưởng sản xuất được tối đa bao nhiêu sản phẩm (theo x, y, z).

HÀM SẢN XUẤT DẠNG LEONTIEF - VÍ DỤ

Example

Giả sử trong một giờ làm việc nhất định, một phân xưởng sản xuất có x máy móc, y công nhân và z đơn vị nguyên vật liệu sẵn sàng. Biết rằng:

- Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm thì cần 1 đơn vị nguyên vật liệu.
- Công suất tối đa mỗi máy móc có thể đạt được là 4 sản phẩm/mỗi giờ.
- Mỗi máy móc cần ít nhất 2 công nhân vận hành.

Hỏi mỗi giờ phân xưởng sản xuất được tối đa bao nhiêu sản phẩm (theo x, y, z).

$$Q = Q(x, y, z) = \min \left\{ z, 4x, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor \right\}$$

HÀM SX DẠNG TUYẾN TÍNH (Linear production functions)

Trường hợp sử dụng

Hàm sx dạng tuyến tính được sử dụng khi mà các yếu tố có thể được thay thế (substitutes) cho nhau theo một tỷ lệ cố định.

$$Q = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

HÀM SX DẠNG TUYẾN TÍNH (Linear production functions)

Trường hợp sử dụng

Hàm sx dạng tuyến tính được sử dụng khi mà các yếu tố có thể được thay thế (substitutes) cho nhau theo một tỷ lệ cố định.

$$Q = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Example

Một cửa hàng Hamburger có 3 loại Hamburger như sau:

- 1 Hamburger Úc: cần 100g thịt bò Úc.
- 2 Hamburger Úc - Ireland: cần 50g thịt bò Úc và 50g thịt bò Ireland.
- 3 Hamburger Ireland: cần 100g thịt bò Ireland.

Giả sử cửa hàng đã bán hết x kg thịt bò Úc và y kg thịt bò Ireland. Thì số lượng Hamburger mà cửa hàng đó đã bán ra (không phụ thuộc vào việc khách hàng mua loại nào) sẽ là

HÀM SX DẠNG TUYẾN TÍNH (Linear production functions)

Trường hợp sử dụng

Hàm sx dạng tuyến tính được sử dụng khi mà các yếu tố có thể được thay thế (substitutes) cho nhau theo một tỷ lệ cố định.

$$Q = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

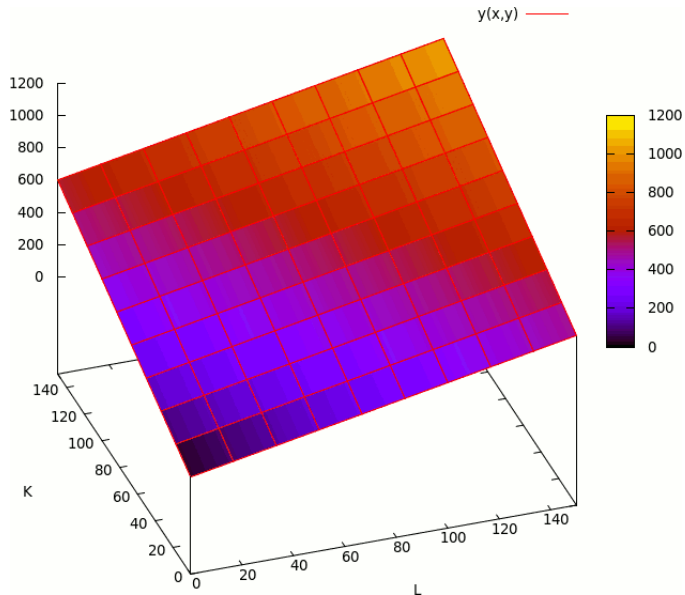
Example

Một cửa hàng Hamburger có 3 loại Hamburger như sau:

- 1 Hamburger Úc: cần 100g thịt bò Úc.
- 2 Hamburger Úc - Ireland: cần 50g thịt bò Úc và 50g thịt bò Ireland.
- 3 Hamburger Ireland: cần 100g thịt bò Ireland.

Giả sử cửa hàng đã bán hết x kg thịt bò Úc và y kg thịt bò Ireland. Thì số lượng Hamburger mà cửa hàng đó đã bán ra (không phụ thuộc vào việc khách hàng mua loại nào) sẽ là

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SX DẠNG TUYẾN TÍNH



HÀM SẢN XUẤT THUẦN NHẤT (homogeneous production functions)

Trường hợp sử dụng

Khi tỷ lệ thay thế giữa đôi một các yếu tố đầu vào (inputs) chỉ phụ thuộc tỷ lệ giữa chúng, mà không phụ thuộc vào độ lớn tuyệt đối của chúng. Nghĩa là

$$Q(\lambda X) = \lambda^k Q(X).$$

Example

Một phân xưởng có x máy loại 1 và y máy loại 2. Biết rằng mỗi máy loại 1 có thể sản xuất 100 sản phẩm mỗi ngày, trong khi con số này của máy 2 là 80. Tính tổng số sản phẩm mỗi ngày mà phân xưởng sản xuất được.

HÀM SẢN XUẤT THUẦN NHẤT (homogeneous production functions)

Trường hợp sử dụng

Khi tỷ lệ thay thế giữa đôi một các yếu tố đầu vào (inputs) chỉ phụ thuộc tỷ lệ giữa chúng, mà không phụ thuộc vào độ lớn tuyệt đối của chúng. Nghĩa là

$$Q(\lambda X) = \lambda^k Q(X).$$

Example

Một phân xưởng có x máy loại 1 và y máy loại 2. Biết rằng mỗi máy loại 1 có thể sản xuất 100 sản phẩm mỗi ngày, trong khi con số này của máy 2 là 80. Tính tổng số sản phẩm mỗi ngày mà phân xưởng sản xuất được.

$$Q = 100x + 80y$$

HÀM SẢN XUẤT THUẦN NHẤT (homogeneous production functions)

Trường hợp sử dụng

Khi tỷ lệ thay thế giữa đôi một các yếu tố đầu vào (inputs) chỉ phụ thuộc tỷ lệ giữa chúng, mà không phụ thuộc vào độ lớn tuyệt đối của chúng. Nghĩa là

$$Q(\lambda X) = \lambda^k Q(X).$$

Example

Một phân xưởng có x máy loại 1 và y máy loại 2. Biết rằng mỗi máy loại 1 có thể sản xuất 100 sản phẩm mỗi ngày, trong khi con số này của máy 2 là 80. Tính tổng số sản phẩm mỗi ngày mà phân xưởng sản xuất được.

$$Q = 100x + 80y$$

Hệ số thay thế x bởi y là

$$\frac{Q'_y}{Q'_x} = \frac{80}{100}$$

ĐỒ THỊ CỦA HÀM THUẦN NHẤT

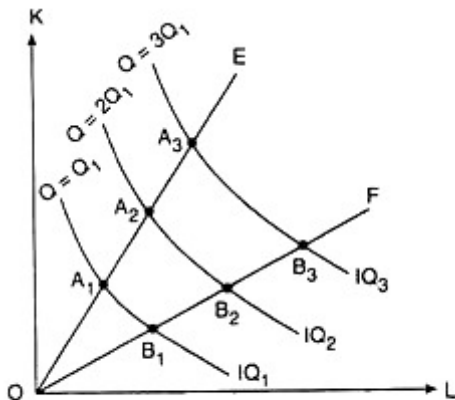


Fig. 8.25 The whole IQ map can be known from the knowledge of any one IQ .

HÀM SẢN XUẤT DẠNG COBB-DOUGLAS

Trường hợp sử dụng

- 1 Sự vắng mặt của bất kì yếu tố đầu vào nào cũng khiến hàm sản xuất có giá trị zero.
- 2 Tỷ lệ giữa giá trị cận biên của hàm sản xuất theo một biến đầu vào bất kì và giá trị trung bình của hàm sản xuất theo biến đầu vào ấy là không đổi. Nghĩa là

$$\frac{MQ_i}{AP_i} = \text{không đổi.}$$

Lúc ấy hàm sản xuất sẽ có dạng (Cobb-Douglas) như sau:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = kx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

HÀM COBB-DOUGLAS - VÍ DỤ

Example

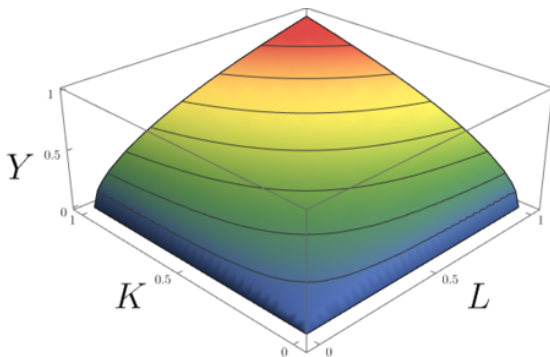
Year	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	...	1917	1918	1919	1920
P	100	101	112	122	124	122	143	...	227	223	218	231
L	100	105	110	117	122	121	125	...	198	201	196	194
K	100	107	114	122	131	138	149	...	335	366	387	407

Table 1: Economic data of the American economy during the period 1899 - 1920

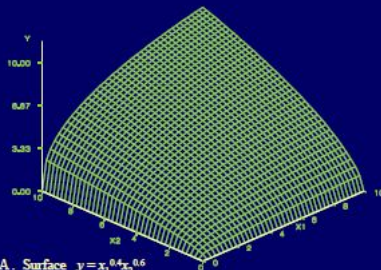
Sử dụng dữ liệu kinh tế cung cấp bởi chính phủ Mỹ, Cobb và Douglas xem xét nền kinh tế trong giai đoạn từ 1899-1920, trong đó các dữ liệu của năm 1899 được đặt làm nền (giá trị được đưa về 100) và giá trị của dữ liệu các năm tiếp theo được diễn tả như là phần trăm của năm 1899. Sau đó Cobb và Douglas sử dụng phương pháp "least squares" để diễn tả lại mối quan hệ giữa hàm sản xuất với vốn và lao động như sau:

$$P(L, K) = 1.01 \times L^{0.75} \times K^{0.25}.$$

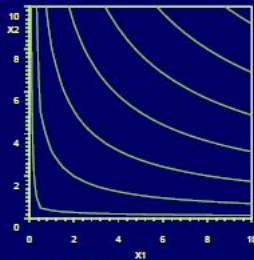
ĐỒ THỊ CỦA HÀM COBB-DOUGLAS



ĐỒ THỊ CỦA HÀM COBB-DOUGLAS



A. Surface $y = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$



B. Isoquants $y = x_1^{0.4} x_2^{0.6}$

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}.$$

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}.$$

- ① Q là hàm thuần nhất bậc $r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, tức là

$$Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r Q(x_1, \dots, x_n).$$

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}.$$

- ❶ Q là hàm thuần nhất bậc $r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, tức là

$$Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r Q(x_1, \dots, x_n).$$

- ❷ Tăng quy mô có hiệu quả khi $r > 1$.

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}.$$

- ❶ Q là hàm thuần nhất bậc $r = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, tức là

$$Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r Q(x_1, \dots, x_n).$$

- ❷ Tăng quy mô có hiệu quả khi $r > 1$.
❸ Tăng quy mô không thay đổi hiệu quả khi $r = 1$.

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS (tt)

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$a_i \times \frac{Q}{x_i} = MQ_i,$$

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS (tt)

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$a_i \times \frac{Q}{x_i} = MQ_i, \text{ hay } a_i = \epsilon_i$$

ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS (tt)

Cho hàm sản xuất Cobb-Douglas

$$Q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

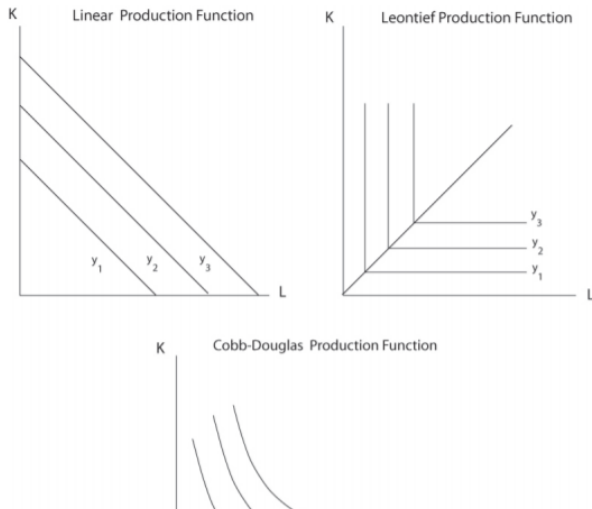
Ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$a_i \times \frac{Q}{x_i} = MQ_i, \text{ hay } a_i = \epsilon_i$$

Như vậy, khi đầu vào thứ i tăng 1% thì sản lượng thay đổi a_i %.

SO SÁNH ĐƯỜNG ĐỒNG MỨC CỦA CÁC HÀM SẢN XUẤT TRÊN

Figure 1. Isoquant Maps for Production Functions with Different Elasticities



HÀM SẢN XUẤT CES (Constant elasticity of substitution)

Trường hợp sử dụng

Khi độ co giãn thay thế giữa các yếu tố đầu vào (the elasticity of substitution) không đổi, i.e.

$$E_{ij} = \frac{\delta \ln \left(\frac{x_j}{x_i} \right)}{\delta \ln \left(\frac{Q'_{x_2}}{Q'_{x_1}} \right)} = \text{hằng số.}$$

Hàm CES có dạng

$$Q = k (a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \cdots + a_n x_n^p)^{r/p},$$

với $k > 0, 0 < a_i < 1, 0 \neq p > 1, r > 0$.

Example

In 1961, Arrow et al. introduced another two-input production function (except the Cobb-Douglas production functions) given by

$$Q = b(aK^p + (1 - a)L^p)^{1/p}.$$

HÀM SẢN XUẤT CES

Example

In 1961, Arrow et al. introduced another two-input production function (except the Cobb-Douglas production functions) given by

$$Q = b(aK^p + (1 - a)L^p)^{1/p}.$$

Đặc điểm của hàm CES

- 1 Hàm CES là hàm thuần nhất bậc r .
- 2 Hàm Cobb-Douglas là một trường hợp đặc biệt của hàm CES khi $r = 1, p \rightarrow 0$.
- 3 Hàm tuyến tính là một trường hợp đặc biệt của hàm CES khi $r = p = 1$.
- 4 Hàm Leontief là một trường hợp đặc biệt của hàm CES khi $r = 1, p \rightarrow -\infty$.

HÀM SẢN XUẤT DẠNG BIẾN ĐỔI LOGARÍT (Translog)

Định nghĩa

Translog là dạng xấp xỉ tuyến tính theo phân tích Taylor của hàm CES (khi $r = 1$) xung quanh điểm $p = 0$

$$\ln Q = \ln A + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \ln x_i \ln x_j.$$

HÀM SẢN XUẤT DẠNG BIẾN ĐỔI LOGARÍT (Translog)

Định nghĩa

Translog là dạng xấp xỉ tuyến tính theo phân tích Taylor của hàm CES (khi $r = 1$) xung quanh điểm $p = 0$

$$\ln Q = \ln A + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \ln x_i \ln x_j.$$

Example

$$\begin{aligned} \ln Q = & \ln A + a_L \ln L + a_K \ln K + \\ & + b_{KK} \ln^2 K + b_{KL} \ln L \ln K + b_{LL} \ln^2 L \end{aligned}$$

HÀM DẠNG TRANSLOG VÀ HÀM COBB-DOUGLAS

Cho Q là hàm dạng Translog, khi đó ta có

$$\frac{\delta(\ln Q)}{\delta(\ln x_i)} = a_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} \ln x_j$$
$$\Rightarrow e^{\epsilon_i} = Ax_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \cdots x_n^{b_{in}}.$$

Do đó, ta có thể nói rằng hệ số co giãn của hàm Translog có dạng Cobb-Douglas.

HÀM SẢN XUẤT DẠNG SIÊU VIỆT (transcendental production functions)

Định nghĩa

$$\ln Q = A + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i.$$

HÀM SẢN XUẤT DẠNG SIÊU VIỆT (transcendental production functions)

Định nghĩa

$$\ln Q = A + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i.$$

Tính chất

1

$$Q = e^A \left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \right) \times e^{\sum_{i=1}^n b_i x_i}.$$

3

$$\frac{\delta Q}{\delta x_i} \times \frac{x_i}{Q} = a_i + b_i x_i.$$

2

$$\frac{\delta Q}{\delta x_i} = Q \left(\frac{a_i}{x_i} + b_i \right).$$

4

$$\epsilon_i = a_i + b_i x_i.$$

BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kinh phí tối đa cho thu mua các vật liệu sản xuất là K , giá của mỗi đơn vị vật liệu thứ i là p_i .

Bài toán tối đa hóa sản lượng

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \leq K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

NHẮC LẠI BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI ĐIỀU KIỆN BẤT ĐẲNG THỨC

Phát biểu bài toán

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max \\ g_i(x) &\leq b_i \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, m \\ x_i &\geq 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng

$$\mathcal{L} = f + \lambda_1(b_1 - g_1) + \dots + \lambda_m(b_m - g_m).$$

NHẮC LẠI VỀ ĐIỂM DỪNG CỦA HÀM LAGRANGE

Điểm dừng của hàm Lagrange

Một điểm $(x^*, \lambda^*) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ được gọi là một điểm dừng của bài toán trên nếu nó thỏa tất cả các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} \leq 0 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} = 0 \end{array} \right. \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_j \leq b_j \\ \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_j (b_j - g_j) = 0 \end{array} \right. \quad \forall j = 1 \dots m$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} & \textcolor{red}{Q} \rightarrow \max \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \times \textcolor{red}{x}_i & \leq K \\ \textcolor{red}{x}_i & \geq 0 \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \leq K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

Điểm dừng

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} \leq 0 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} = 0 \end{array} \right. \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_j \leq b_j \\ \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_j (b_j - g_j) = 0 \end{array} \right. \quad \forall j = 1 \dots m$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \leq K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta Q}{\delta x_i} - \lambda p_i \leq 0 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \left(\frac{\delta Q}{\delta x_i} - \lambda p_i \right) = 0 \end{array} \right. \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq K \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right) = 0 \end{array} \right.$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} & \textcolor{red}{Q} \rightarrow \max \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \times \textcolor{red}{x}_i \leq K \\ \textcolor{red}{x}_i \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

Nếu $\lambda = 0$ thì $\frac{\delta Q}{\delta x_i} \leq 0$ với mọi i . Suy ra $\frac{\delta Q}{\delta x_i} = 0$ với mọi i . Hay Q không phụ thuộc bất kì biến nào!!!

Vậy $\lambda > 0$. Điều đó kéo theo nghiệm tối ưu $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ phải thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K.$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \leq K \\ x_i \geq 0 \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

Do đó, bài toán tối ưu với điều kiện bất đẳng thức bên trên tương đương với

$$\begin{aligned} Q \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$L(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$L(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

Do những tính chất của hàm sản xuất làm cho nó thỏa mãn *định lý Arrow - Enthoven*, nên X^* là nghiệm tối ưu khi và chỉ khi tồn tại λ^* sao cho

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x_i}(X^*, \lambda^*) = 0 \forall i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta Q}{\delta x_i}(X^*, \lambda^*) - \lambda^* p_i = 0 \forall i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K \end{array} \right.$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$L(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta Q}{\delta x_i}(X^*, \lambda^*) - \lambda^* p_i = 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{MQ_i}{MQ_j}(X^*, \lambda^*) = \frac{p_i}{p_j} \quad \forall i, j \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K \end{array} \right.$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ĐA HÓA SẢN LƯỢNG

Bài toán tối đa hóa sản lượng

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$L(X, \lambda) = Q + \lambda \left(K - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{MQ_i}{MQ_j}(X^*, \lambda^*) = \frac{p_i}{p_j} \quad \forall i, j \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i^* = K \end{array} \right.$$

*Điều kiện cần của việc sử dụng tối ưu các yếu tố đầu vào là ở mức mà tại đó **tỷ lệ thay thế** giữa các yếu tố bằng **tỷ giá** của chúng.*

HÀM SẢN XUẤT DÀI HẠN (Profit maximization)

Với các biến ngoại sinh $K, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} & Q \rightarrow \max \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

HÀM SẢN XUẤT DÀI HẠN (Profit maximization)

Với các biến ngoại sinh $K, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

- 1 Ký hiệu $PM = Q(X^*)$.
 PM là mức sản lượng tối đa sx được với chi phí K và mức giá $p = (p_1, \dots, p_n)$.

HÀM SẢN XUẤT DÀI HẠN (Profit maximization)

Với các biến ngoại sinh $K, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = K \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

- ① Ký hiệu $PM = Q(X^*)$.
 PM là mức sản lượng tối đa sx được với chi phí K và mức giá $p = (p_1, \dots, p_n)$.

- ② Do tính duy nhất của PM , nên

$$PM = PM(K, p).$$

BÀI TOÁN TỐI THIỂU HÓA CHI PHÍ

- Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Doanh nghiệp dự kiến sản xuất được ít nhất là Q_o sản phẩm.
- Giá của mỗi đơn vị vật liệu thứ i là p_i .

BÀI TOÁN TỐI THIỂU HÓA CHI PHÍ

- Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Doanh nghiệp dự kiến sản xuất được ít nhất là Q_o sản phẩm.
- Giá của mỗi đơn vị vật liệu thứ i là p_i .

Bài toán tối thiểu hóa chi phí

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q & \geq Q_o \\ x_i & \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q & \geq Q_o \\ x_i & \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i + \lambda (Q_o - Q).$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q &= Q_o \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i + \lambda (Q_o - Q).$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q &= Q_o \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i + \lambda (Q_o - Q).$$

$$\begin{cases} p_i - \lambda^* M Q_i(X^*) \\ Q(X^*) \end{cases} = 0 \quad \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{M Q_i}{M Q_j}(X^*, \lambda^*) &= \frac{p_i}{p_j} \quad \forall i, j \\ Q(X^*) &= Q_o \end{cases}$$

NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \times x_i &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q &= Q_o \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm Lagrange tương ứng:

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i + \lambda (Q_o - Q).$$

$$\begin{cases} \frac{MQ_i}{MQ_j}(X^*, \lambda^*) = \frac{p_i}{p_j} \quad \forall i, j \\ Q(x_1^*, \dots, x_n^*) = Q_o \end{cases}$$

*Điều kiện cần của việc sử dụng tối ưu các yếu tố đầu vào (để chi phí là thấp nhất) là ở mức mà tại đó **tỷ lệ thay thế** giữa các yếu tố bằng **tỷ giá** của chúng.*

HÀM TỔNG CHI PHÍ DÀI HẠN (the Long run total cost)

Với các biến ngoại sinh $Q_o, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q & \geq Q_o \\ x_i & \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

HÀM TỔNG CHI PHÍ DÀI HẠN (the Long run total cost)

Với các biến ngoại sinh $Q_o, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q \geq Q_o \\ x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

- ① Ký hiệu $LTC = pX^* = p_1x_1^* + \dots + p_nx_n^*$. LTC là mức chi phí thấp nhất để sản xuất được Q_o sản lượng trong điều kiện mức giá là $p = (p_1, \dots, p_n)$.

HÀM TỔNG CHI PHÍ DÀI HẠN (the Long run total cost)

Với các biến ngoại sinh $Q_o, p_1, \dots, p_n$ được xác định, bài toán sau có nghiệm tối ưu X^* :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q & \geq Q_o \\ x_i & \geq 0 \quad \forall i. \end{cases} \end{aligned}$$

- ① Ký hiệu $LTC = pX^* = p_1x_1^* + \dots + p_nx_n^*$. LTC là mức chi phí thấp nhất để sản xuất được Q_o sản lượng trong điều kiện mức

giá là $p = (p_1, \dots, p_n)$.

- ② Do tính duy nhất của LTC , nên

$$LTC = LTC(Q, p).$$

TÍNH CHẤT CỦA HÀM CHI PHÍ DÀI HẠN

- ① $LTC(Q, p)$ tăng theo Q .
- ② $LTC(Q, p)$ không giảm theo p .
- ③ $LTC(Q, p)$ thuần nhất bậc một theo p .

HÀM CHI PHÍ CẬN BIÊN DÀI HẠN

Định nghĩa

Khi xét hàm tổng chi phí dài hạn $LTC(Q, p)$ trong điều kiện mức giá p là cố định thì hàm chi phí cận biên dài hạn là:

$$LMC(Q) = \frac{\delta LTC(Q, p)}{\delta Q}.$$

Lưu ý:

$$LMC(Q) = \frac{p_i}{MQ_i(X^*)},$$

trong đó X^* là nghiệm tối ưu của bài toán cực tiểu hóa chi phí và cũng có thể được xem như một (vectơ) hàm của Q và p .

HÀM CHI PHÍ BÌNH QUÂN DÀI HẠN

Hàm chi phí trung bình dài hạn

$$LAC(Q, p) = \frac{LTC(Q, p)}{Q}.$$

Độ co giãn của chi phí theo sản lượng

$$\epsilon^{LTC} = \epsilon_Q^{LTC} = \frac{LMC(Q)}{LAC(Q)}.$$

HÀM CHI PHÍ BÌNH QUÂN DÀI HẠN

Hàm chi phí trung bình dài hạn

$$LAC(Q, p) = \frac{LTC(Q, p)}{Q}.$$

Độ co giãn của chi phí theo sản lượng

$$\epsilon^{LTC} = \epsilon_Q^{LTC} = \frac{LMC(Q)}{LAC(Q)}.$$

- ① Nếu ở mức sản lượng Q_o , $\epsilon_Q^{LTC} > 1$ thì ta nói doanh nghiệp đang duy trì mức sản lượng có tính phi kinh tế theo quy mô.
- ② Nếu ở mức sản lượng Q_o , $\epsilon_Q^{LTC} < 1$ thì ta nói doanh nghiệp đang duy trì mức sản lượng có tính phi kinh tế theo quy mô.

VÍ DỤ

Example

Xác định hàm chi phí, hàm chi phí cận biên, hàm chi phí trung bình dài hạn của doanh nghiệp có hàm sản xuất là

$$Q = 2K^{0.4}L^{0.6},$$

trong đó K, L lần lượt là lượng vốn và lao động. Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn là \$4 và một đơn vị lao động là \$6.

Example

Từ công thức $LAC = \frac{LTC}{Q}$, xác định mối liên hệ giữa $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q}$ và LMC .

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.
- Do quy luật lợi ích cận biên giảm dần, nên đến một mức sản lượng Q_o , khi mọi ưu thế đã được tận dụng thì việc tăng sản lượng sẽ kéo theo chi phí trung bình tăng.

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.
- Do quy luật lợi ích cận biên giảm dần, nên đến một mức sản lượng Q_o , khi mọi ưu thế đã được tận dụng thì việc tăng sản lượng sẽ kéo theo chi phí trung bình tăng.

Như vậy,

- 1 Đường chi phí trung bình có dạng hình chữ U .

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.
- Do quy luật lợi ích cận biên giảm dần, nên đến một mức sản lượng Q_o , khi mọi ưu thế đã được tận dụng thì việc tăng sản lượng sẽ kéo theo chi phí trung bình tăng.

Như vậy,

- 1 Đường chi phí trung bình có dạng hình chữ U.
- 2 Do $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q} = \frac{(LMC) - (LAC)}{Q}$, nên điểm cực tiểu của chi phí trung bình là giao điểm của LMC và LAC (Q_o).

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.
- Do quy luật lợi ích cận biên giảm dần, nên đến một mức sản lượng Q_o , khi mọi ưu thế đã được tận dụng thì việc tăng sản lượng sẽ kéo theo chi phí trung bình tăng.

Như vậy,

- 1 Đường chi phí trung bình có dạng hình chữ U.
- 2 Do $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q} = \frac{(LMC) - (LAC)}{Q}$, nên điểm cực tiểu của chi phí trung bình là giao điểm của LMC và LAC (Q_o).
- 3 Do LAC đạt cực tiểu tại điểm giao trên nên $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q} < 0$ khi $Q < Q_o$, hay $LMC < LAC$ khi $Q < Q_o$.

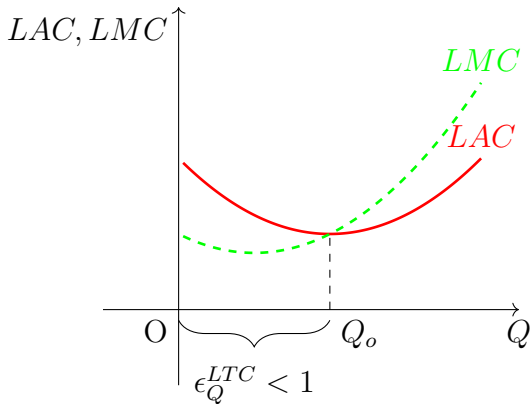
PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC

- Do tận dụng lợi thế của sản xuất lớn, nên khi doanh nghiệp tăng mức sản lượng Q thì chi phí bình quân sẽ giảm.
- Do quy luật lợi ích cận biên giảm dần, nên đến một mức sản lượng Q_o , khi mọi ưu thế đã được tận dụng thì việc tăng sản lượng sẽ kéo theo chi phí trung bình tăng.

Như vậy,

- 1 Đường chi phí trung bình có dạng hình chữ U.
- 2 Do $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q} = \frac{(LMC) - (LAC)}{Q}$, nên điểm cực tiểu của chi phí trung bình là giao điểm của LMC và LAC (Q_o).
- 3 Do LAC đạt cực tiểu tại điểm giao trên nên $\frac{\delta(LAC)}{\delta Q} < 0$ khi $Q < Q_o$, hay $LMC < LAC$ khi $Q < Q_o$.
- 4 Ngược lại $LMC > LAC$ khi $Q > Q_o$.

PHÂN TÍCH QUAN HỆ GIỮA LMC VÀ LAC - ĐỒ THỊ



ĐỘ CO GIÃN THEO YẾU TỐ SẢN XUẤT

❶ Bỏ đề Shephard

$$\frac{\delta LTC}{\delta p_i} = x_i^*.$$

ĐỘ CO GIÃN THEO YẾU TỐ SẢN XUẤT

❶ Bổ đề Shephard

$$\frac{\delta LTC}{\delta p_i} = x_i^*.$$

❷

$$\epsilon_i^{LTC} = \frac{x_i^*(Q, p)p_i}{LTC(Q, p)}.$$

ĐỘ CO GIÃN THEO YẾU TỐ SẢN XUẤT

❶ Bổ đề Shephard

$$\frac{\delta LTC}{\delta p_i} = x_i^*.$$

❷

$$\epsilon_i^{LTC} = \frac{x_i^*(Q, p)p_i}{LTC(Q, p)}.$$

❸

$$\epsilon_i^{LAC} = \frac{x_i^*(Q, p)p_i}{LTC(Q, p)} = \epsilon_i^{LTC}.$$

ĐỘ CO GIÃN THEO YẾU TỐ SẢN XUẤT

❶ Bổ đề Shephard

$$\frac{\delta LTC}{\delta p_i} = x_i^*.$$

❷

$$\epsilon_i^{LTC} = \frac{x_i^*(Q, p)p_i}{LTC(Q, p)}.$$

❸

$$\epsilon_i^{LAC} = \frac{x_i^*(Q, p)p_i}{LTC(Q, p)} = \epsilon_i^{LTC}.$$

❹

$$\epsilon_i^{LMC} = \frac{\delta x_i^*(Q, p)}{\delta Q} \times \frac{p_i}{LMC(Q, p)}.$$

VÍ DỤ

Example

Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = 25K^{0.5}L^{0.5}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho giá vốn $p_K = 12$, giá lao động $p_L = 3$.

- a. Tính mức sử dụng K, L để sản xuất sản lượng $Q = Q_o = 1250$ với chi phí nhỏ nhất.
- b. Tính hệ số co giãn của tổng chi phí theo sản lượng, theo giá yếu tố tại Q_o, p_K, p_L .
- c. Nếu giá vốn và lao động đều tăng 10% với mức sản lượng như trước, mức sử dụng vốn và lao động tối ưu sẽ thay đổi như thế nào?
- d. Phân tích tác động của giá vốn và giá lao động tới tổng chi phí.

HÀM CHI PHÍ NGẮN HẠN (short run total cost)

Labor	Quantity	Fixed Cost	Variable Cost	Total Cost	Marginal Cost	Average Total Cost	Average Variable Cost
1	16	\$160	\$80	\$240	\$5.00	\$15.00	\$5.00
2	40	\$160	\$160	\$320	\$3.30	\$8.00	\$4.00
3	60	\$160	\$240	\$400	\$4.00	\$6.60	\$4.00
4	72	\$160	\$320	\$480	\$6.60	\$6.60	\$4.40
5	80	\$160	\$400	\$560	\$10.00	\$7.00	\$5.00
6	84	\$160	\$480	\$640	\$20.00	\$7.60	\$5.70

Tham khảo thêm tại Short-run.

MÔ HÌNH XÁC ĐỊNH HÀM TỔNG CHI PHÍ NGẮN HẠN

- Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Viết lại $(x_1, \dots, x_n) = (X_v, X_f)$ trong đó X_v là các biến thay đổi, còn $X_f = X_f^o$ là các biến cố định (cho trước).
- Giá của vật liệu là $p = (p_1, \dots, p_n) = (p_v, p_f)$.

Bài toán tối thiểu hóa chi phí ngắn hạn

$$\begin{aligned} & X_v \times p_v + X_f \times p_f \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q(X_v, X_f) \geq Q_o \\ X_v \geq 0 \\ X_f = X_f^o \end{cases} \end{aligned}$$

HÀM TỔNG CHI PHÍ NGẮN HẠN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí ngắn hạn

$$\begin{aligned} & X_v \times p_v + X_f \times p_f \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q(X_v, X_f) & \geq Q_o \\ X_v & \geq 0 \\ X_f & = X_f^o \end{cases} \end{aligned}$$

HÀM TỔNG CHI PHÍ NGẮN HẠN

Bài toán tối thiểu hóa chi phí ngắn hạn

$$\begin{aligned} & X_v \times p_v + X_f \times p_f \quad \rightarrow \min \\ & \begin{cases} Q(X_v, X_f) \geq Q_o \\ X_v \geq 0 \\ X_f = X_f^o \end{cases} \end{aligned}$$

Định nghĩa

Kí hiệu X^* là nghiệm tối ưu, và STC là giá trị tối ưu. Hàm tổng chi phí ngắn hạn:

$$STC = STC(Q, p).$$

CHI PHÍ BIẾN ĐỔI VÀ CỐ ĐỊNH (variable and fixed costs)

Nhận xét:

$$\begin{aligned}STC &= X_v^* \times p_v + X_f^* \times p_f \\ X_f^* &= X_f^o\end{aligned}$$

- ❶ $VC = X_v^* p_v$ được gọi là chi phí biến đổi (variable cost).
- ❷ $FC = X_f^o p_f$ được gọi là chi phí cố định (fixed cost).

HÀM CHI PHÍ TRUNG BÌNH, CẬN BIÊN NGẮN HẠN

Hàm chi phí trung bình ngắn hạn

$$SAC(Q, p) = \frac{STC}{Q}.$$

Hàm chi phí cận biên ngắn hạn

$$SMC(Q, p) = \frac{\delta STC}{\delta Q}.$$

Hệ số co giãn theo sản lượng

$$\epsilon^{STC} = \frac{SMC}{SAC}.$$

CHI PHÍ NGẮN HẠN VÀ CHI PHÍ DÀI HẠN

Chi phí dài hạn

$$\begin{array}{ll} X \times p & \rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{ll} Q(X) & \geq Q_o \\ X & \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Chi phí ngắn hạn

$$\begin{array}{ll} X_v \times p_v + X_f^o \times p_f & \rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{ll} Q(X_v, X_f^o) & \geq Q_o \\ X_v & \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

CHI PHÍ NGẮN HẠN VÀ CHI PHÍ DÀI HẠN

Chi phí dài hạn

$$\begin{array}{ll} X \times p & \rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{l} Q(X) \geq Q_o \\ X \geq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Chi phí ngắn hạn

$$\begin{array}{ll} X_v \times p_v + X_f^o \times p_f & \rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{l} Q(X_v, X_f^o) \geq Q_o \\ X_v \geq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Do tập phương án của bài toán ngắn hạn chứa trong tập phương án của bài toán dài hạn (bài toán dài hạn có nhiều sự lựa chọn hơn), nên

$$LTC(Q, p) \leq STC(Q, p).$$

CHI PHÍ NGẮN HẠN VÀ CHI PHÍ DÀI HẠN

Chi phí dài hạn

$$\begin{aligned} X \times p &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q(X) &\geq Q_o \\ X &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Chi phí ngắn hạn

$$\begin{aligned} X_v \times p_v + X_f^o \times p_f &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q(X_v, X_f^o) &\geq Q_o \\ X_v &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tại một mức sản lượng Q_o nào đó (khi vectơ giá p không đổi), bài toán dài hạn cho ra nghiệm $X^* = (X_v^*, X_f^*)$ và $LTC(Q_o, p)$. Trong bài toán ngắn hạn, chọn $X_f^o = X_f^*$, ta được $STC(Q_o, X_f^o, p)$ và nghiệm tối ưu cũng chính là X_v^* . Do đó,

$$STC(Q_o, X_f^o, p) = LTC(Q_o, p).$$

CHI PHÍ NGẮN HẠN VÀ CHI PHÍ DÀI HẠN

Chi phí dài hạn

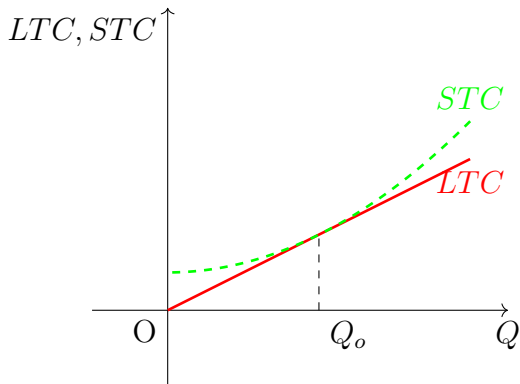
$$\begin{aligned} X \times p &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q(X) &\geq Q_o \\ X &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Chi phí ngắn hạn

$$\begin{aligned} X_v \times p_v + X_f^o \times p_f &\rightarrow \min \\ \begin{cases} Q(X_v, X_f^o) &\geq Q_o \\ X_v &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 1 Đồ thị của STC luôn nằm trên LTC.
- 2 Đồ thị của STC sẽ tiếp xúc với LTC tại Q_o nếu mức sử dụng các yếu tố cố định ngắn hạn cũng là mức sử dụng các yếu tố cố định dài hạn tối ưu.
- 3 Ta luôn giả sử một cách tổng quát rằng với một mức sử dụng nhất định các yếu tố cố định thì sẽ luôn tồn tại mức sản lượng để hàm chi phí ngắn hạn và dài hạn tiếp xúc.

MINH HỌA BẰNG ĐỒ THỊ



Trường hợp đường STC không giao với đường LTC tại đây.

BÀI TẬP NHÓM MỞ RỘNG

Bài tập 1

Xác định hàm chi phí, hàm chi phí cận biên, hàm chi phí trung bình dài hạn của doanh nghiệp có hàm sản xuất là

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

trong đó giá thuê một đơn vị yếu tố K và L lần lượt là w_K và w_L .

Bài tập 2

Tương tự như bài tập 1 nhưng hàm sản xuất có dạng tuyến tính, dạng thuần nhất, dạng CES, dạng biến đổi logarit, và dạng siêu việt.

PHÂN TÍCH SO SÁNH TÍNH VỚI CÁC HÀM SX

BÀI TẬP NHÓM

Phân tích so sánh tính với các hàm sản xuất có dạng

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| ① Hàm sản xuất Leontief. | ⑤ Hàm sản xuất CES. |
| ② Hàm sản xuất tuyến tính. | ⑥ Hàm sản xuất Logarit. |
| ③ Hàm sản xuất thuần nhất. | ⑦ Hàm sản xuất siêu việt. |
| ④ Hàm sản xuất Cobb-Douglas. | |

Yêu cầu: trình bày trên word hoặc latex: lịch sử, giá trị cận biên, hệ số co giãn, sự thay thế giữa các biến, ý nghĩa kinh tế tương ứng, công thức liên quan (nếu có), vấn đề khác liên quan (nếu có) như: *the elasticity of substitution, the marginal rate of technical substitution.*

Thank you

Thank you!